PROF. G. GALLUCCI

SAGGIO CRITICO SU L'ANTINOMIA DI RUSSELL

GUBBIO
SCUOLA TIPOGRAFICA "ODERISI,,
—
1929 - VII

BIBLIOTECA DI FILOSOFIA
F.G. Misc.
99
4
SAPIENZA - UNIV. DI ROMA

Digitized by Google

NHS 25689 00
Gen 14980
F.G Misc. 99.4

Digitized by Google

G. Gallucci
Via Cacciottoli al Vomero 18
Napoli

A Sua Eccellenza
Il Sen. Giovanni Gentile
omaggio dell'autore

BIBLIOTECA DI FILOSOFIA UNIVERSITA' DI ROMA

Saggio critico su l'antinomia di Russell.

1. *Difficoltà logiche del concetto dedekindiano di classe e loro superamento: Il genere prossimo aristotelico.* — *L'oggetto* come molteplicità unificata si rappresenta con il *concetto* corrispondente. Diremo con Dedekind che una molteplicità (insieme, aggregato, classe) è determinata quando esiste un criterio C tale che per ogni oggetto singolo si possa dire se soddisfa o no a quel criterio; indicheremo allora con α gli oggetti che soddisfano al criterio C e con *non* α gli oggetti che non soddisfano al criterio C. In tal modo la *classe, l'insieme*, non è considerato come *totum simul* attualmente presente (definizione cantoriana) ma *in fieri*. Di più, noi prescindiamo dalla particolarità del criterio, per cui questo riesce più o meno facilmente applicabile, e dalle particolarità dell'insieme, per cui questo può avere un numero finito od infinito di elementi.

Come dev'essere intesa la disgiunzione α, *non* α? Non certo nel significato di disgiunzione assoluta, perchè questa implica la considerazione della totalità assoluta di tutti gli oggetti (Universo assoluto), che ci trasporta in piena metalogica ed in piena metafisica; i filosofi da secoli ci insegnano che l'assoluto non si può pensare senza contraddizione. Non c'è mica bisogno di passare attraverso i geroglifici di Frege e di Peano per convincersi che dalla logica formale (del pensiero *determinato*) è necessario escludere l'assoluto Tutto, la classe di tutte le classi, la classe di tutti gli oggetti, la classe di tutte le proposizioni e simili argomenti metafisici.

Sia, dunque α *triangolo equilatero*, *non* α sarà *triangolo non equilatero* e non già *non-triangolo equilatero*. Il criterio C è *L'avere i tre lati eguali* e l'applicazione di questo criterio *ha senso* solo se si applica ai triangoli; a nessuno verrà mai in mente di applicare il criterio dei tre lati eguali ad una rosa, alla stella Sirio, all'uomo, al cavallo ecc.

La definizione dedekindiana di *classe* (e del concetto) va dunque completata così:

« Un insieme o classe α è determinato quando esiste un criterio C (α) tale che per ogni oggetto si possa decidere se esso soddisfa oppure non soddisfa al criterio C, *purchè l'applicazione di tale criterio abbia un senso* ».

L'insieme o classe di tutti gli oggetti, per i quali l'applicazione di un criterio C (α) ha un senso, si dirà *genere prossimo* della classe α o del concetto α.

Così *l'essere un triangolo* costituisce il genere prossimo dell'*essere un triangolo equilatero*. La disgiunzione completa avrà luogo nel genere prossimo; per esempio, tra tutti i triangoli, il criterio C del-

Digitized by Google

l'avere i tre lati eguali (differenza specifica) distinguerà quelli (α) che sono equilateri da quelli (*non* α) che non sono equilateri.

Ma qui si potrebbe obbiettare: « la distinzione tra gli oggetti per i quali l'applicazione del criterio C ha un senso e gli oggetti per i quali l'applicazione del criterio C non ha senso, implica evidentemente la considerazione della classe di tutti gli oggetti, e quindi la disgiunzione assoluta e l'assoluto tutto, cacciati dalla porta rientrano per la finestra ».

Rispondo: in un momento *attuale* della conoscenza, alla mia coscienza non si presenta *prima* tutto l'universo e *poi*, dopo l'azione selettiva dell'attenzione, l'oggetto della conoscenza (una foresta); la foresta non viene messa a confronto con tutti gli altri oggetti e *poi* prescelta; ma si presenta immediatamente a me, e sulla soglia della mia coscienza non si presenta altro. Allo stesso modo, per determinare il concetto del triangolo equilatero, non mi debbo *prima* occupare di tutto l'universo e *poi* scegliere il mio oggetto; è fondamentale caratteristica dell'attività cognitiva la selezione automatica, per così dire, del suo oggetto, prescindendo del tutto da ogni altro. Così, ancora, quando io dico: *definire un concetto significa determinarlo in modo che esso non possa confondersi con nessun altro,* non implico la considerazione esplicita di *tutti* i concetti, ma solo di quelli che appartengono al campo di una mia ricerca determinata. Se definisco il triangolo, non debbo porre in relazione il concetto del triangolo, con tutti gli altri concetti, uno per uno, ma solo con quelli del campo determinato della conoscenza matematica. A chi nega la possibilità della logica perchè ritiene impossibile determinare un concetto in modo che questo sia distinto da ogni altro, si può rispondere con *l'argomento di Diogene*, mostrando questi *concetti determinati* in una monografia di Cremona, o di Beltrami . . . . .

In sostanza, quando noi diciamo che per un oggetto A l'applicazione del criterio C *non ha senso*, veniamo a dire che l'oggetto A è automaticamente escluso dalla nostra ricerca, *insignificante* per noi nella determinata teoria che andiamo costruendo.

Dalle precedenti considerazioni risulta legittimata pienamente l'introduzione del genere prossimo nel concetto. L'esclusione di questo importantissimo elemento ha condotto i logici moderni alla confusione della logica formale con la metalogica. In qualsiasi teoria logica la disgiunzione α, *non* α venga intesa in senso *assoluto* non è possibile evitare la considerazione esplicita della classe di tutti gli oggetti, della classe di tutte le classi ecc.

2. *L'invarianza del significato del concetto nel processo logico.* — In un concetto determinato α distinguiamo: il criterio *C* (α) che lo determina (comprensione del concetto); il *genere prossimo* α_1, cioè l'aggregato di tutti gli oggetti per i quali ha un senso l'applicazione del criterio C; la α — denominazione, cioè la contrazione del significato del concetto in una parola o in un gruppo di parole; la α — classe cioè l'insieme di tutti gli α_1 che soddisfano al criterio C (esten-

Digitized by Google

zione del concetto); la classe dei non — α cioè l'insieme di tutti gli α_1 che non soddisfano al criterio C.

Il concetto α, così inteso, ha un significato invariante in ogni processo logico che si riferisca ad α. Questa condizione dell'invarianza del significato del concetto è poi la condizione della stessa intelligibilità del linguaggio: « La condizione necessaria per l'intelligibilità del linguaggio è che i termini adoperati conservino un significato invariante nel discorso ».

Fu questa una felice intuizione di Leibniz, molto opportunamente ricordata e proseguita da Federico Enriquez nel suo importante lavoro « Per la storia della logica » (Ed. Zanichelli, p. 210 e seg.).

I principii fondamentali della logica (le così dette *leggi del pensiero*) non sono altro che le varie forme nelle quali si può enunciare il principio dell'invarianza del significato dei concetti nei processi logici.

1° Ogni α è un α (principio d'identità).

2° Nessun α può essere un *non* α, e nessun *non* α può essere un α (principio di contraddizione).

3° Ogni α_1 (genere prossimo di (α)) o è un α, oppure è un *non* α (principio del terzo escluso).

In tutte e tre le proposizioni l'invarianza va intesa in questo significato: il concetto α è conservato nel suo simbolo, nella sua denominazione, nella sua comprensione e nella sua estensione. Di più, se la α — classe, nella prima parte della proposizione è intesa come classe di *singoli individui,* oppure come classe di classi, anche nella seconda parte va intesa allo *stesso modo.*

Il principio di contraddizione ed il principio del terzo escluso vanno dunque intesi in senso ristretto: l'opposizione fra α e *non* α non dev'essere l'opposizione assoluta, che implica la considerazione della classe di *tutte* le classi, ma *l'opposizione relativa* al genere prossimo α_1. Così risultano confermati i risultati di un'importantissima ricerca di G. Milhaud su la limitata applicabilità del principio di contraddizione (« Essai sur les conditions et les limites de la certitude logique »; Paris 1894; « Le rationnel », Paris 1898).

Non soltanto i tre principî fondamentali della logica trovano la loro giustificazione nel principio della invarianza del significato del concetto, ma anche tutti i *prareambula logicae*, cioè tutte le leggi che si premettono all'analisi delle varie forme di sillogismi. Per evitare il circolo vizioso di dimostrare per sillogismi la validità del sillogismo, tale validità deve essere giustificata solo in base al principio dell'invarianza del significato dei concetti. E difatti la discussione delle forme di sillogismi si può svolgere in modo perfettamente rigoroso; la tralascio qui per non distrarmi dall'argomento del mio saggio.

Ancora un'altra precauzione bisogna prendere: i concetti vanno intesi principalmente nella loro *comprensione*; la considerazione esplicita della α — classe apporterebbe tutte le difficoltà logiche del concetto cantoriano di classe.

Digitized by Google

3. *Necessità logica del sistema completo dei principii di una teoria.* — Da quanto abbiamo detto nel 2 risulta questa importantissima conseguenza: non risultano *determinati* i concetti nei quali il genere prossimo è la classe di tutte le classi. Difatti il criterio C dovrebbe in tal caso applicarsi esplicitamente alla classe di tutte le classi.

Ora, se dal concetto del triangolo equilatero (per esempio) ci eleviamo man mano a concetti sempre più comprensivi, corriamo il rischio di trovarci un'altra volta in presenza dell'*assoluto tutto.* Il genere prossimo di triangolo equilatero è triangolo, il genere prossimo di triangolo è poligono, il genere prossimo di poligono è linea spezzata, il genere prossimo di spezzata è insieme di punti ed il genere prossimo di insieme di punti è l'insieme di elementi geometrici (sempre nel campo della matematica) e siamo già arrivati: il genere prossimo di insieme di oggetti matematici è l'insieme di tutte le classi (di oggetti matematici e non matematici).

S'impone dunque la necessità di fermarci un pò prima di raggiungere come genere prossimo la classe di tutte le classi. Aristotele si fermò alle *categorie* (summa genera), e non potè evitare l'interferenza della metafisica nella logica formale. Noi, invece, arrivati all'insieme di tutti gli elementi geometrici (punti, rette, piani) non definiamo questo insieme, ma lo presentiamo in blocco mediante un sistema completo di nozioni primitive e di assiomi (V. per esempio Hilbert: « Grundlagen der Geometrie »). Questa concezione del sistema completo dei principii di una scienza costituisce la più importante scoverta della logica moderna; solo ora è possibile costruire una teoria logica veramente indipendente dalla metafisica.

Giuseppe Peano, al congresso matematico di Parigi del 1900 reclamò per sè e per la sua scuola il diritto di priorità della scoverta, di fronte ad Hilbert, ed aveva tutto il diritto di farlo. La scuola peaniana aveva prima del 1900 stabilito con ogni determinatezza il sistema completo dei principii dell'aritmetica.

Ad Hilbert si deve la prima formazione del sistema completo dei principii della geometria. E' bene anche ricordare a tal proposito che il germe, cioè l'idea fondamentale dalla quale scaturisce il concetto del sistema completo, può rintracciarsi nella classica memoria di Beltrami: « Saggio d' interpretazione della geometria non Euclidea » (1865).

4. *Distinzione originaria fondamentale tra il concetto e l'oggetto corrispondente* — Come vi è una sintesi primitiva delle rappresentazioni (la loro unificazione nella mia coscienza, in quanto sono tutte *mie* rappresentazioni) così vi è una distinzione originaria fondamentale: la distinzione tra il *pensiero* e *l'oggetto del pensiero.* Se si pensa, si pensa a *qualche cosa*, non esiste un pensare che non sia un *pensare a qualche cosa*, anche quando si pensa il pensiero stesso. Dicendo: « il pensiero del pensiero » la stessa parola *pensiero* ha due significati distinti: prima significa *il pensare*, pura attività del pensare, e poi significa il *pensato*, cioè il pensiero come oggetto dell'attività stessa.

Digitized by Google

Conseguenza: l'oggetto α ed il concetto di α (la α - classe) sono distinti come l'oggetto del pensiero ed il pensiero. Il triangolo ha tre lati, ma dire che il concetto del triangolo ha tre lati è un non senso. Il cavallo ha quattro zampe, ma a nessuno verrà mai in testa di mettersi a contare le zampe del *concetto del cavallo.* Per questa ragione si può affermare che se α è un concetto determinato, *la α classe non è un α.* « *Le classi di cui si occupa la logica formale, e che determinano concetti, non possono mai contenere se stesse come elemento* ».

5. *Significato logico dei giudizi predicativi.* — Tralasceremo completamente nella nostra indagine tutti i giudizi che non possono porsi sotto la forma di giudizi predicativi, perchè essi sono logicamente insignificanti, se pure esistono. Di più ci limiteremo al giudizio predicativo del tipo A di Aristotele (universale o singolare) potendosi estendere a tutte le altre forme le considerazioni che ora faremo.

Che significano i due giudizii: « Ogni α è un β ». Questo α è un β » ?

Se il soggetto è un *singolare logico* (il singolo α, l'individuo α) di esso si predica l'appartenenza alla α - classe, ossia il soddisfare al criterio C (α). Se il soggetto è una molteplicità (plurale logico), *il predicato va inteso distribuitivamente rispetto al soggetto stesso (principium de omni et nullo).* Di più la α - classe e la β - classe debbono intendersi entrambe come classi di singoli oppure entrambe come classi di classi.

Vi sono alcuni giudizi predicativi *grammaticalmente* e non predicativi logicamente. Ad esempio « *gli apostoli* sono *dodici* ». E' chiaro che un apostolo solo non sarà *dodici*, perchè qui l'*esser dodici* non ha significato distribuitivo rispetto al soggetto: gli apostoli.

Per porre quel giudizio sotto forma predicativa basta trasformarlo in quest'altro: « il gruppo, l'aggregato, degli apostoli può porsi in corrispondenza biunivoca con ogni classe di dodici elementi » (giudizio singolare del tipo A: della classe degli apostoli si predica l'appartenenza alla classe di tutte le classi di dodici elementi).

Oltre al significato distribuitivo del predicato rispetto al soggetto bisogna nel giudizio « ogni α è un β » segnalare *il significato implicativo*, che è della massima importanza. Se « x è un α » ed « ogni α è un β » « quell'x sarà un β ». Se è vera la proposizione « x è un α » (proposizione *a*) ed è vera l'altra proposizione « ogni α è un β » (proposizione *b*), sarà vera la terza proposizione « x è un β » (proposizione *c*). Diremo che la proposizione *a* implica la proposizione *c* in virtù della proposizione *b* oppure che da *a* si deduce *c* in virtù di *b*. (Modus ponens di Aristotele).

Questo è il tipo più semplice di ragionamento logico, nel quale non soltanto è invariato il significato dei concetti, ma anche il *valore verità* dei giudizi, che viene trasferito dalla premessa alla conclusione. Il risultato più importante della logica formale sarà la dimostrazione del teorema: « La condizione necessaria e sufficiente

Digitized by Google

perchè un processo logico sia coerente (cioè *valido*) è che esso si possa presentare come un complesso di implicazioni elementari del tipo ora indicato ».

Due altre osservazioni vogliamo aggiungere, prima di trattare della genesi dell'antinomia rousselliana:

1. Se si vuol sintetizzare l'oggetto della logica formale, si deve dire che tutte le classi che definiscono concetti determinati non hanno la particolarità di contenere se stesse come elementi: « dunque la logica ha per oggetto la classe di tutte le classi che non contengono se stesse come elementi ». Non si può dunque sintetizzare l'oggetto della logica senza passare ai confini della logica stessa, in quel punto in cui finisce la logica formale e comincia la metalogica. E questo è naturale: ogni vera sintesi di una teoria ci fa automaticamente passare al di là della stessa teoria.

2. Il concetto implica il giudizio ed il giudizio implica il ragionamento; il concetto, il giudizio, il ragionamento sono insieme distinti ed unificati (dialettica del pensiero logico). Ed anche questo è naturale, poichè non si può distinguere senza unificare e non si può unificare senza distinguere.

6. *La prima formulazione dell'antinomia di Russell.* Ben due volte Russel nelle pagine tremende, che vanno dal capitolo I. al 5. dei « Principles of mathematics » fu per arrivare al punto più delicato della logica formale, che gli avrebbe permesso di semplificare e rendere rigoroso tutto il resto della trattazione. Si tratta della distinzione fra il concetto α e l'oggetto corrispondente (p. 47 e p. 53). « Io incontro un uomo ». Questa proposizione non si riferisce al *concetto uomo*, dice Russel, ma ad un certo « actual biped denoted by the concept ». Dunque nella detta proposizione un concetto (uomo) è unito a ciò che non è concetto (l'actual biped). Per intenderci meglio, diremo più semplicemente, che quando Russell incontra un uomo, non incontra mica il *concetto di un uomo*, ma un uomo (*oggetto*). E' la dialettica della formazione dei concetti, cosa antichissima, ma a Russell parve nuova, ed alle tante distinzioni già fatte ne aggiunse un'altra (*maening; denoting*), e continuò imperterrito nella sua via. Arriviamo così alla pag. 80 ove sono introdotti per la prima volta i predicati predicabili di sè stessi; questi si ripresentano a pag. 97 e 98 ed a pag. 101, 102 sono collegati con le classi che contengono se stesse come elemento.

E' chiaro che se la α-classe del concetto contiene se stessa come elemento, allora il giudizio costitutivo del concetto presenta il predicato predicabile e se stesso: « L'esser α è α ». P. e. la bianchezza (l'esser bianco) è bianca; la verificabilità (l'esser verificabile) è verificabile; l'unità (l'esser uno) è una ecc.

Se analiziamo il significato logico di questi giudizi che sembra presentino il predicato predicabile di sè stesso e che costituirono un dei maggiori tormenti di Russell, troveremo che le proposizioni enunciate, se ad esse vogliamo dare un senso, esprimono l'innocen-

Digitized by Google

tissimo principio d'identità. *La bianchezza non è bianca precisamente come il concetto del cavallo non ha quattro zampe*; possiamo solo dire che « ogni cosa che partecipi della bianchezza (ogni cosa bianca) è bianca. E così per le altre due proposizioni: « Ogni proposizione verificabile è verificabile » « ogni cosa che sia una è una ».

Ma Russell dimentica, proprio nel punto giusto, la sua distinzione fra *menning* e *denoting* e, come se niente fosse, mette al galoppo il concetto del cavallo arrivando così diritto diritto all'antinomia (pag. 102).

Sia w la classe delle classi che non contengono sè stesse come elemento, e sia y un elemento qualsiasi di w; sia inoltre w' la sottoclasse che rimane da w quando si esclude y. Poichè w' è un elemento di w, non può contenere se stesso come elemento, cioè la classe w' dovrà essere y. Risulta allora che ogni elemento di w dovrà coincidere con ogni altro elemento di w. Ne segue, dice candidamente Russell, che la bicicletta è un cucchiaino da te ed il cucchiaino da te è una bicicletta. « This is plainly absurd, and any number of similar absurdities can be proved ». Ed in una sola pagina il nostro autore ne accumula altre tre.

Tutte queste assurdità sono eliminate se si osserva: 1°) che la classe di tutte le classi che non contengono se stesse come elemento ha per genere prossimo la classe di tutte le classi e perciò non può rappresentare un concetto *determinato* (n. 2 e 4) 2°) che il principio del terzo escluso, come il principio di contraddizione, sono applicabili solo nel caso in cui si presentino concetti *determinati* e valgono solo se riferiti al campo del genere prossimo di tali concetti (n. 3).

7. *Il paradosso logico di Lewis Carroll* — Che per Russel la contraddizione fra α e non-α si debba intendere in *modo assoluto* risulta pure da un altro famoso paradosso che trovasi a pag. 18 dei « Principles » e che fu oggetto degli acuti strali di Poincarè (Science et méthode » p. 173-174). « Una proposizione falsa implica ogni altra proposizione ». Più chiaramente: « se p è una proposizione, non-p è equivalente all'asserzione che p implica tutte le proposizioni ». Qui si vede che nello stesso tempo si interpetra la contraddizione p, *non-p* in modo assoluto e si introduce la classe di tutte le proposizioni, che implica la considerazione della classe di *tutti* gli oggetti. Doppia ragione per dichiarare un non-senso il paradosso russelliano.

In generale, dovunque ed a chiunque sia capitato di presentare l'opposizione α, non-α come *assoluta*, non è possibile evitare il nonsenso e l'assurdità. Persino Hilbert, nelle sue profonde ricerche sui principii della matematica (Math. Annalen V. 88) non potè superare le difficoltà logiche che si presentano nello studio dei fondamenti della scienza quando tutti i concetti non risultino perfettamente determinati. Si ricordino a questo proposito le acute osservazioni di Michele Cipolla su la funzione transfinita τ hilbertiana (« Sui fondamenti logici della Matematica secondo le recenti vedute di Hilbert ». Atti del XII congresso della Società Italiana per il progresso delle scienze ed Annali di Matematica 1924).

Digitized by Google

Russell fu condotto al suo paradosso per risolvere una difficoltà logica proposta da Lewis Carrol nella rivista « Mind » (Nuova serie n. II, 1894).

Si tratta di questo: Tre persone Tizio, Sempronio e Caio accudiscono alle faccende di un salone di barbiere; essi si danno il cambio in modo che sempre almeno uno dei tre si trovi in bottega. Si sa inoltre che Sempronio, essendo malaticcio non può uscire se non accompagnato da Caio. Ora, *Uncle Jim* cerca di dimostrare che Tizio deve essere in ogni caso nel magazzino, con il seguente ragionamento:

« Se Tizio è fuori, allora; se Sempronio è fuori, Caio dev'essere in bottega. Ma se Sempronio è fuori, Caio dev'essere anche fuori. Dunque Tizio dev'essere sempre in bottega. Traduciamo in simboli:

Tizio è fuori: proposizione p
Sempronio è fuori: proposizione q
Caio è fuori: proposizione r

Intanto q *implica* r (Se Sempronio è fuori, anche Caio è fuori), Se Tizio è fuori, dal fatto che Sempronio è fuori si deduce che Caio è dentro, cioè p implica che q *implica non-r*. Se p fosse vera si avrebbe questo assurdo:

q implica r
q implica non-r

dunque, dice Uncle Jim, p è falsa e Tizio non può essere fuori. Conclusione sbagliata, perchè se esaminiamo tutti i casi possibili troviamo che se Tizio è fuori, poichè Sempronio non può uscire se non accompagnato da Caio, ed almeno uno deve restare, o restano Sempronio e Caio, oppure resta solo Sempronio. La conclusione esatta è che se p è vera q è falsa. E difatti se una proposizione q implica due proposizioni contraddittorie r, non-r, essa dev'essere falsa. Non può però affermarsi che, reciprocamente, se una proposizione q è falsa essa implica r e non-r, cioè tutte le proposizioni (questo fu lo strano abbaglio di Russell).

In quanto poi al significato di non-r questa proposizione non può intendersi come ogni altra proposizione *diversa* da r. Se r è la proposizione falsa « Il triangolo equilatero è pure rettangolo », non-r non sarà ogni altra proposizione che mi venga in testa di enunciare (p. e. che « la terra gira intorno al sole ») ma semplicemente questa « Il triangolo equilatero non può essere rettangolo ». In questo senso una proposizione falsa implica *solo* la sua contradditoria come vera (principio della dimostrazione per assurdo).

8. *I tentativi di Russell per trovare la soluzione dell'antinomia.* — Uno dei più formidabili capitoli dei « Principles » è quello dedicato alla « Contraddizione ».

Durante la discussione, molto interessante, dei vari modi di intendere l'antinomia, il Russell intravede la necessità di escludere dalla logica la nozione dell'insieme di *tutti* gli oggetti e l'insieme di *tutti* gli insiemi, ma non si decide al gran passo perchè ritiene

Digitized by Google

che escludendo quelle nozioni « all formal truth would bè impossible, and Mathematies would be abolished at one stroke ». Ad ogni modo, non essendo riuscito a trovare la soluzione dell'antinomia, rimanda il seguito della ricerca all'appendice. Ed avrà un bel cercarla questa soluzione, fino a quando resterà fermo nel suo proposito di non rimandare alla metalogica quegli elementi che introdotti nella logica formale rendono impossibile la *determinazione* dei concetti (n. 1-7).

E difatti se esaminiamo il contenuto dell'appendice B troviamo iniziata una dottrina dei tipi, molto complicata, ma che già in certo modo rispecchia l'esigenza di abbandonare l'indeterminatezza del concetto di classe. Alla fine poi (pag. 520) Russell stesso dichiara il suo completo insuccesso. « The totality of all logical objects, or « of all propositions, involves, it would scem, a fundamental logi- « cal difficulty; what the complete solution of the difficulty may be, « *I have not succeeded in discovering;* but as it affects the very foun- « dations of reasoning, I earnestly commend the study of it to the « attention of all students of logie ».

Nell'altra opera « Principia mathematicae » Bertrand Russell ha perfezionata la sua teoria delle relazioni e dei tipi includendo esplicitamente alcuni fra i principi fondamentali della logica aristotelica. Il sistema resta il più completo ed il più rigoroso trattamento dei principi della matematica, anche se suscettibile di ulteriore perfezionamento. Il Cipolla lo preferisce all'ultimo sistema di Hilbert e Leon Chwistek, pur proponendo qualche variante, lo segue fedelmente nell'ultima sua monografia « The Theory of constructive types ». (Cracovia 1923).

9. *Il vero significato dell'antinomia di Russell.* — Diamo prima l'enunciazione chiara ed esplicita dell'antinomia russelliana:

Soggetto: la classe w di tutte le classi che non contengono se stesse come elemento.

Tesi: La w contiene se stessa come elemento.

Sia la w formata dagli elementi (α, a', a, 1, m, n,....) nessuno dei quali sia una classe contenente se stessa come elemento. Se la classe w non contenesse se stessa come elemento dovrebbe coincidere con una delle α, a',.... perchè queste classi costituiscono la *totalità* di quelle che non contengono sè stesse come elemento.

Ma se w coincide con α, essa risulterà formata da (w. a', a,, 1, m,,....) e per conseguenza contiene sè stessa come elemento, contro l'ipotesi fatta. Allo stesso assurdo si arriva se w coincide con un altro qualunque elemento (a, a', a,, 1,....).

Antitesi: La w non contiene se stessa come elemento.

Premessa la costituzione della classe w che contiene *tutte e sole* le classi (α, a', a,, 1,....) nessuna delle quali contiene sè stessa come elemento, supponiamo che w contenga sè stessa come elemento. Allora w dovrà essere una delle classi (α, a', a,, 1,....); sia per esempio α. Ma se w coincide con la classe α, essa non contiene sè stessa

Digitized by Google

come elemento, dunque si giunge anche qui a contraddire l'ipotesi e quindi all'assurdo. Allo stesso assurdo si perviene supponendo che w coincida con un'altra qualunque delle classi (α, a', $a_{,,}$ 1...).

Quando in matematica, premessa una definizione A si arriva a due proposizioni contraddittorie p, non-p, si conclude che i ragionamenti debbono essere errati, oppure il concetto di A non è determinato in modo che il suo significato permanga invariato nel processo logico; non c'è altra ipotesi possibile.

Nel procedimento ora esposto errori logici non ve ne sono, dunque il concetto della classe w non è determinato in modo da rispettare il principio dell'invarianza del significato dei concetti. E difatti noi vediamo che nel ragionamento fatto nella tesi e nell'antitesi il significato di w *muta automaticamente:* se w non contiene sè stessa come elemento, deve contenere se stessa come elemento, e viceversa, se w contiene sè stessa come elemento, non deve contenere sè stessa come elemento. Appena cerchiamo di determinare il significato di w, vediamo che questo si muta nel suo opposto.

E questo dovevamo aspettarcelo: « il concetto della classe di tutte le classi che non contengono sè stesse come elemento non è logicamente *determinato* perchè il genere prossimo è la classe di tutte le classi, cioè la *totalità assoluta* degli oggetti ». Allora il principio della invarianza del significato dei concetti nel processo logico viene meno, e cessa la validità di tutti i principii della logica presi in blocco (n. 2-7).

La soluzione dell'antinomia russelliana è che essa è e rimane un'antinomia, l'*antinomia fondamentale della metalogica:* l'assoluto, qualunque sia la forma sotto la quale si presenta, *non può pensarsi senza contraddizione.*

Qual'è il valore logico e filosofico dell'antinomia di Russell?

1°) La dimostrazione dell'assoluta necessità di limitare il campo della logica formale in modo da distinguerla nettamente dalla metalogica, dalla metafisica e dalla teoria della conoscenza. I concetti α, β, γ della logica formale debbono essere *determinati* in modo che il loro significato resti invariante nel processo della ricerca; tutti i *praeambula logicae* si presentano allora come le varie forme sotto le quali si può enunciare il principio dell'invarianza del significato dei termini nel discorso e le leggi della logica esprimono niente altro che le condizioni dell'intelligibilità del linguaggio. Si riesce ad evitare l'interferenza della metalogica e della metafisica nella logica formale soltanto se si esclude dal campo di questa la disgiunzione α, non-α intesa in modo assoluto (necessità della inclusione del *genere prossimo* nel concetto di classe, necessità del sistema completo dei principii, necessità d'intendere il principio di contraddizione e del terzo escluso nel loro significato *relativo* al genere prossimo ecc). Se i principii della logica si svolgono conformemente a queste avvertenze, si avrà un'armonica costruzione nella quale verranno ad inquadrarsi, insieme con i risultati definitivi della logica moderna,

Digitized by Google

i più importanti principii della logica aristotelica. Bertrand Russell, solo alla fine del suo ventennale travaglio si è accostato ad Aristotele, ed è proprio il ritorno a taluni principii aristotelici che l'ha messo in grado di liberarsi da alcuni suoi preconcetti e di perfezionare il suo edificio dei fondamenti della logica (dai « Principles » ai « Principia »).

2°) Dal punto di vista filosofico l'antinomia di Russell si presenta come un'importante conquista del pensiero speculativo. Emmanuele Kant, dopo aver distinto l'intelletto dalla ragione ed i *concetti* dalle *idee*, concluse con l'affermazione della relatività della conoscenza.

Ogni volta che la ragione tende a superare la conoscenza fenomenica si trova di fronte all'antinomia cioè ad un conflitto con sè stessa, che nessun ragionamento può fare sparire. L'idea dell'*universo*, quando si voglia con questa sorpassare la conoscenza concettuale, fenomenica, dà luogo ad un'antinomia, l'antinomia dell'infinito, che Kant espone così:

Soggetto: il mondo, l'universo.

Tesi: Il mondo ha un principio nel tempo ed è limitato nello spazio.

Antitesi: Il mondo non ha nè cominciamento nè limiti nello spazio, ma è infinito nel tempo come nello spazio.

Con due dimostrazioni per assurdo Kant dimostra che la tesi è l'antitesi.

Su questo modello ho esposta l'antinomia di Russell.

Ora, i due ragionamenti kantiani furono dimostrati fallaci da Hegel (« La scienza della logica » ed. Laterza pag. 276 e seguenti, vol. I) gli argomenti del quale furono poi ripresentati da Renouvier (« Les dilemmes de la métaphysique pure » Paris 1901 cap. 3.). Mancava quindi una giustificazione alla tesi kantiana che la ragione, se si vuole elevare dalla conoscenza concettuale alla conoscenza del noumeno, si imbatte necessariamente nell'antinomia.

Ebbene questa giustificazione ora c'è, e per merito di Russell. Se il pensiero si vuole elevare dai concetti perfettamente determinati all'idea della totalità assoluta degli oggetti o delle proposizioni, non può non incontrare un'antinomia fondamentale, chiara, semplice, in cui le due dimostrazioni per assurdo della tesi e dell'antitesi si presentano come assolutamente inattaccabili dal punto di vista della logica formale.

10. *Le credenziali dei principi della logica; il criterio della testimonianza.* Che significa dire che il principio d'identità è vero? La conclusione del nostro saggio sarà la risposta a questa domanda.

Il paradosso di Russell dimostra che l'antinomia si presenta proprio all'inizio della logica formale se non si distingue con la massima precisione la logica del *pensiero determinato* dalla metalogica. Abbiamo visto che per la determinazione di un concetto α non è sufficiente la definizione dedikindiana, ma è necessaria l'introduzione del genere prossimo α, (n. 1 e 2); *dalla logica del pensiero determi-*

Digitized by Google

nato debbono essere esclusi tutti quei concetti il cui genere prossimo è la classe di tutte le classi. Solo così è possibile definire il significato *implicativo* dei giudizi (n. 5) e fissare il principio della conservazione del *valore verità* dei giudizi nel processo logico formale. Determinati allora, nel loro preciso significato, il principio d'identità, il principio di contraddizione ed in generale i *praeambula logica e*, si conclude che il loro *valore verità*, cioè la loro giustificazione risiede nel principio dell'intelligibilità del linguaggio, cioè nel principio dell'invarianza del significato dei concetti determinati nel processo logico. Un concetto α dev'essere determinato in modo che nessun altro concetto possa confondersi con esso, ed il suo significato deve restare invariante nel processo logico. Ora, la pregiudiziale dello scetticismo è basata su questi due punti: 1. si nega la possibilità di determinare un concetto in modo che questo sia *distinto da ogni altro*, poichè bisognerebbe distinguere un oggetto dagl'infiniti altri, e per caratterizzarlo bisognerebbe distinguere le proprietà caratteristiche dalle infinite altre proprietà. 2. Si nega la possibilità dei ragionamenti perchè non risultando determinati i concetti, il loro significato non può restare invariato nel discorso. Si risponde al 1 punto presentando i *concetti determinati* in atto, in una teoria scientifica, argomento di Diogene (n. 1). Si risponde al 2. punto osservando che lo stesso scettico non può nulla concludere contro il dogmatico se non ammette l'invarianza del significato delle sue parole nel *suo discorso.* Lo scettico dunque *nega la sua attività nel momento stesso in cui la pone in atto* (argomento di Cartesio rettamente inteso).

L'argomento di Diogene e l'argomento di Cartesio costituiscono insieme il *criterio della testimonianza*, che, presentato in questa forma ha la sua piena efficacia nella *logica del pensiero determinato*, perchè ci dà la ragione vera e profonda dei principi della logica formale: negare il valore verità del principio d'identità, di contraddizione ecc. equivarrebbe a negare l'attività del pensiero nel momento stesso in cui la si attua.

Nel passaggio dalla logica formale alla conoscenza scientifica ed alla speculazione filosofica vedremo quali forme assume questo criterio della testimonianza; di ciò tratteremo in un altro saggio.

PROF. G. GALLUCCI

Digitized by Google